第20回
古くて新しい導波管に学ぶ

小暮裕明

ボードの記事　ビギナーズ

電気回路の設計には，オーム注1の法則やキルヒホッフ注2の法則が大活躍します．配線の端子間に電圧 V を印加して線路に電流 I を流すことで，その先にあるデバイスに電力 $P(= V \times I)$ を伝えるので，配線路を伝送線路（transmission line）とも呼びます．一方，電磁気学では配線路の近傍に分布する電界 E と磁界 H が電力（ポインティング電力）を伝えると考えます．マイクロ波の電力伝送などで使われる導波管も伝送線路ですが，その構造は断面が長方形や円形の管ですから，線という文字を除いて伝送路と呼んだほうが適切かもしれません．導波管は中空の金属管ですから，これに電圧を加えようとすると困ってしまいます．そこで管内に閉じ込められた電界と磁界が電力を運ぶとすれば，励振する方法が考えられます．導波管はマイクロ波やミリ波の伝送路として古くから使われており，多くの研究成果が蓄積されています．今回は電磁界シミュレータで管内の電磁界分布を可視化し，平行線路との違いを学びます．

（筆者）

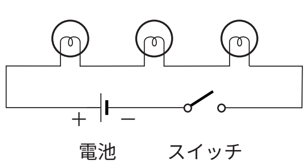


図1　電池と3個の豆電球を直列につないだ回路
スイッチを閉じれば電流が流れ，豆電球が点灯する．

注1：オーム（1789年～1854年）は，ドイツの物理学者．1827年，電圧が抵抗と電流の積となるというオームの法則を発表した．オームは電圧と電流の比である抵抗の単位として採用されている．
注2：キルヒホッフ（1824年～1887年）は，プロシア生まれの物理学者．

1．伝送路の考えかた

まずはじめにクイズを出題しましょう．図1は小学校の理科の時間に学んだ電池と3個の豆電球を直列につないだ回路です．電源は電池で，スイッチを閉じれば電流が流れ，デバイス（豆電球）に電力が供給されて点灯します．

● 長～い線路の問題

これだけではクイズにならないので，図2に示すように長い線路を使って，豆電球を日本，オーストラリア，ニュージーランドに置くとします．電池とスイッチはハワイ諸島にあって，線路の抵抗はないものとすれば，スイッチを

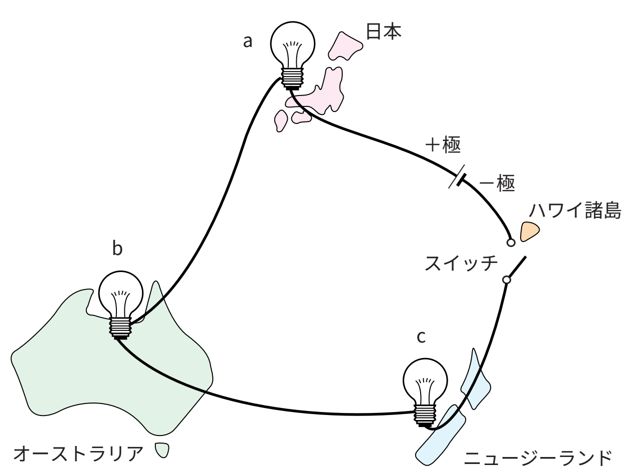


図2　長い線路の問題
豆電球を日本，オーストラリア，ニュージーランドに置く．電池とスイッチはハワイ諸島にある．線路の抵抗はないものとする．スイッチを入れたときに，豆電球はどのように点灯するだろうか？

KeyWord　導波管，オーム，キルヒホッフ，伝送線路，電界，磁界，電力，分布定数線路，過度応答，Micro-Stripes，エネルギー速度

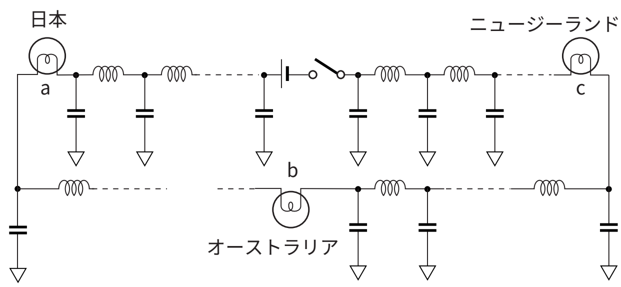


図3　分布定数回路を使った説明

等価回路を使って考察してみると，電池に近い順に点灯することになる．

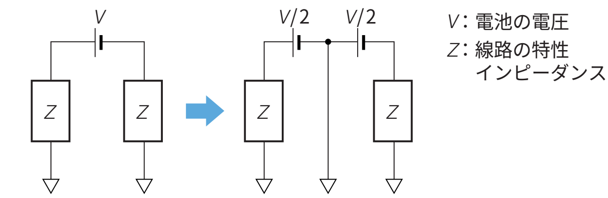


図4　電池を中心に簡略化した図

電池を中心にして，$V/2$なる電圧が日本とニュージーランドへ向かって流れる．

閉じたときに，豆電球はどのように点灯するのでしょうか？

次のような答えの候補が考えられます．

1）電池に近い順に，日本→ニュージーランド→オーストラリアと点灯する．

2）いくら離れていても同時に点灯する．

3）電子はマイナス極からプラス極に移動するため，ニュージーランド→オーストラリア→日本の順に点灯する．

これは筆者の学生時代に話題になったクイズですが，後に物理の新書[1]にも載っていることがわかりました．同書では「電池が地球にあって，bが太陽付近にあるとすれば，電球bがつくのは，それより8分以上後でなければいけない」，「光や電波が地球から太陽に届くまでに8分あまりかかります…」と話が進みます．

● 分布定数線路による考察

学生時代のある先輩の答えは，**図3**のような勉強したての分布定数線路（本誌2004年3月号，pp.115-122の連載第2回を参照）を使って，「電池を中心にして，これを**図4**のように簡略化すると，$V/2$なる電圧が日本とニュージーランドへ向かって流れる」というものでした．

［電池から日本までの距離］＜［電池からニュージーランドまでの距離］＜［電池からオーストラリアまでの距離］という順であれば，答えは1）です．

図3は無損失線路と仮定しているので，電圧が伝わる速度vは次の式で表されます（右掲のコラム「線路の過渡応答」を参照）．

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\mathrm{m/s}] \quad \cdots\cdots(1)$$

L：線路単位長さ当たりのインダクタンス

C：線路単位長さ当たりのキャパシタンス

これは等価回路による説明です．等価回路とは「複雑な回路の電気的特性を計算するときに，これと同じ電圧と電流の関係を持つ回路」（連載第2回を参照）です．この問題の回路は複雑とはいえませんが，外観がシンプルでも，電気的なふるまいが複雑である場合は，やはり等価回路を使うと役に立ちます．

● 電子の移動で考えると混乱

理科の授業では電線の中にある電子が動くことで電流が流れると学びました．電流の流れは電子の発見以前にプラス極からマイナス極へ向かうように定められましたが，電子の移動はその逆です．マイナス極が発生源ですから，3）はこれに基づく答えでしょう．

しかし，同時にプラス極では電子が取り込まれているのですから，スイッチを閉じると両極で同時に電子が移動し，やがてその効果が電球bに伝わるので，1）が正解？

そうではなく，両極で発生した「動こうとする力」が電線全体に伝わって初めて全電子が動きだすから，正解は2）？

力学的に電子が動く力で電流を説明すると，1）と2）のどちらか迷います．そもそも電流を流す力はどのようにして起きるのか？ そこで登場するのが「電界」です．

● 電界で考える

本誌2004年7月号，pp.132-139の連載第4回で定義しましたが，ここでは空間にある平行平板コンデンサを考えてみます．いま2枚の金属板がプラスとマイナスに帯電して，これらの間に電界Eが現れたとします．これによって極板間にある電荷が極に向かって移動します．これが電流です．

電界が現れることで電界中にある荷電粒子が動き始めるので，「電界は電気を動かす一種の命令（後述）」[1]と考えられ，命令の及ぶ範囲で電流が発生します．

図5はスイッチを使わずに電荷のない回路に電池を接続

Column 線路の過渡応答

図A-1は，本文の図3の無損失線路モデルのスイッチ付近を示しています．これはスイッチを入れてからΔt秒後に，微小距離Δxだけ「電圧が進んだ」状態で，その物理的な意味は，線分の容量$C_d\,\Delta x$が充電されて電圧V_sになり，これらの積$C_d\,\Delta x \cdot V_s$だけの電荷ΔQが移動したことになります（本誌2005年11月号，pp.79-86の連載第14回を参照）．

以上のことから，線路に流れる電流は次の式で表されます．

$$i=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=C_d V_s \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(A-1)}$$

$\Delta x/\Delta t$は，この変動（「電圧」）が線路に沿って移動する速度uを表しますから，

$$i=C_d V_s u \quad \text{(A-2)}$$

となります．この電流が流れることで，線路のインダクタンスL_dには次の式で表される磁束ϕが発生します（本誌2005年5月号，pp.133-140の連載第11回を参照）．

$$\phi=L_d\Delta x\cdot i=L_d\Delta x\cdot C_d V_s u \quad \text{(A-3)}$$

ここでファラデーの法則（本誌2004年10月号，pp.142-149の連載第6回を参照）を思い出すと，磁束の変化の割合が線路電圧に等しくなるとして，

$$V_s=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}=L_d C_d V_s u^2 \quad \text{(A-4)}$$

式(A-4)から速度uを求めると，

$$u=\frac{1}{\sqrt{L_d C_d}}\quad [\mathrm{m/s}] \quad \text{(A-5)}$$

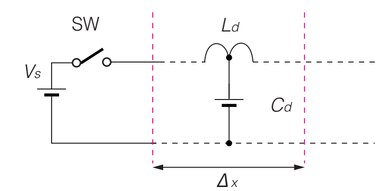
式(A-5)を式(A-1)に代入すると，

$$i=C_d V_s\frac{1}{\sqrt{L_d C_d}}=\frac{V_s}{\sqrt{L_d/C_d}} \quad \text{(A-6)}$$

が得られます．これを電圧と電流の比に変形して，

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_d}{C_d}}\quad [\Omega] \quad \text{(A-7)}$$

となり，線路の特性インピーダンス（あるいは波動インピーダンス）が得られます（連載第7回を参照）[3]．



図A-1 無損失線路モデルのスイッチ付近

したとき，電界が回路を被っているようすを示しています．P点とQ点の先は電位がゼロです．これらの点は式(1)の速度で進みます．ここでP点と電池，Q点と電池の間に電流が流れているかどうかが問題になります．

最前線にある電界の気持ち（？）になってみると，その先の情報は持っていませんから，電線が無限に続いているのかどうかもわかりません．ただその先は電位がゼロであり，そこには無限の容量のコンデンサがあって，Q点と電池の間には電流が流れ続けていると考えられます．P点と電池の間も同様に考えられますから，この電流によって電球が点灯すれば，正解は1）ということになるでしょう．

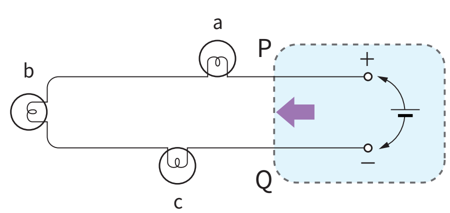


図5 電界を使った説明

スイッチを使わずに電荷のない回路に電池を接続したとき，電界が回路を被っているようす．P点とQ点の先は電位がゼロである．そこには無限の容量のコンデンサがあって，Q点と電池の間，P点と電池の間には電流が流れ続けていると考えられる．この電流によって電球が点灯すれば，電池に近い順に点灯する．

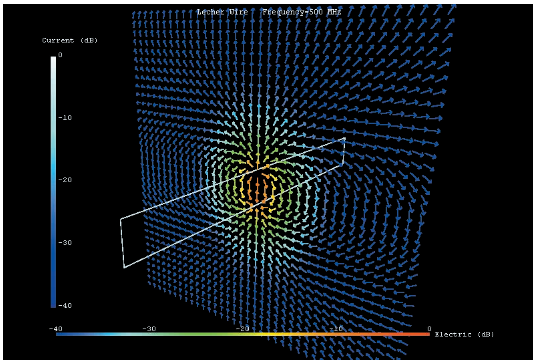
● 直流ではなく交流の場合は？

スイッチを使わずに考えたほうが理解しやすかったのですが，本来の回路はスイッチを入れない状態では，スイッチとプラス極の間が高電位，スイッチとマイナス極の間が低電位になっているうえ，電界の広がる順を考えなければならず，さらに複雑になります．

図5の電源が交流の場合，やはり直流と同様に長い線路の先は無限容量コンデンサと等価であるとします．交流理論から，RLC直列回路の交流電流は流れ続けることがわかっていますから，1）になるでしょう．

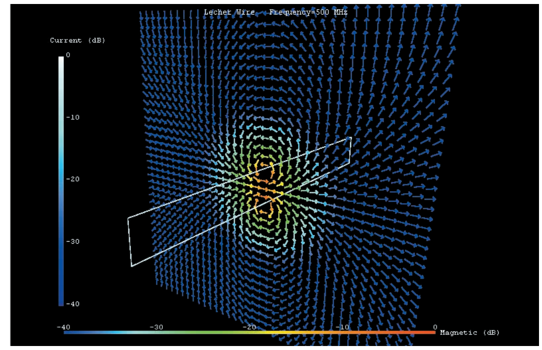
スイッチ式の場合を厳密に考察すれば，交流電源では回路が開いていても電流は流れるでしょう．しかし，これはきわめて微弱なので，電流はゼロと考えられます．

また交流の場合は，周波数によっては線路長と波長の関



◀ **図6**
線路に直交する断面における電界ベクトル
Micro-Stripesで表示したもの．

▶ **図7**
線路に直交する断面における磁界ベクトル
Micro-Stripesで表示したもの．



係が問題になります．波長に比べて線路が十分短ければ位相差は無視できますから，スイッチの両端の電位は逆で，スイッチを閉じれば電界が発生します．しかし，無損失線路（閉回路）の長さが例えば半波長のときには，電源の両端の電位は等しくなり，電流は生じなくなると考えられます．

● 電界の走り

図4では「電圧が流れる」，またコラムでは「変動（電圧）が移動する」と表現しました．**図5**による説明では，「電界の走り」によって説明できることがわかりました．直流の過渡応答を再考するクイズは，シンプルな回路にもかかわらず，電気現象の本質に迫る問題です．原典[(1)]は物理の本らしく，電界の実体を光子（こうし）の飛び交う空間として説明しており，素粒子論による電界の定義が披露されています．

さて**図6**と**図7**は平行2線の線路に直交する断面において電界ベクトルと磁界ベクトルをMicro-Stripes[注3]で表示したものです[(4),(5)]．端部に電源を設け，反対側の端部は50Ωの抵抗で終端されています．

図6は定常状態[注4]のある時間における電界分布で，クイズの**図5**に示すP点とQ点を含む電界の走りの最前線を示しているものではありません．しかしこの電界ベクトルは，上の線路から放射状に出て下の線路に至るパターンを示しています．また，電界ベクトルは円形断面を持つ線路の表面に対して垂直に出入りしているともいえます．もちろんこれはある瞬間のようすですから，1/2周期後には逆向きになります．

図3や**図A-1**の分布定数モデルでは，Cに充電される電気エネルギーが電界を，またLに蓄えられる磁気エネルギーが磁界を等価的に表しているわけです．

● エネルギーの伝搬

図7は**図6**と同じ時刻の磁界ベクトルです．例えば線間の中点の電界ベクトルと磁界ベクトルを重ねると，互いに直交していることがわかります．ほかの任意の点でも互いに直交しており，電界と磁界のベクトル積（連載第4回を参照）Sをポインティング・ベクトルと呼び，電磁界によって運ばれるエネルギーの流れを示すベクトルとします．

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad \cdots\cdots (2)$$

電子が移動することでエネルギーの流れができますが，電界の走りによってポインティング・ベクトルというエネルギーの流れができるとも説明できます．

電界の走りは光速で信号（情報）を伝搬し，通信に役立ちます．電線内の電子の速度は遅いのですが，電界の変化という「命令」が伝搬して電子を動かすことで，情報を得ることができるというわけです．

平行2線路のように，進行方向に対して電界，磁界がともに垂直な場合をTEM[注5]モードの伝搬といいますが，伝搬速度は次の式で表されますから，真空中では光速に等しくなります．

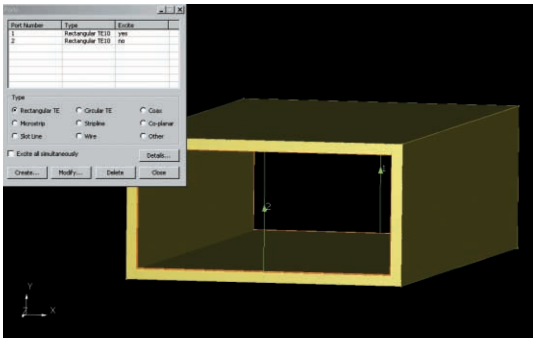
$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \qquad \cdots\cdots (3)$$

ここでc：真空中の光速，ε_r：比誘電率，μ_r：比透磁率

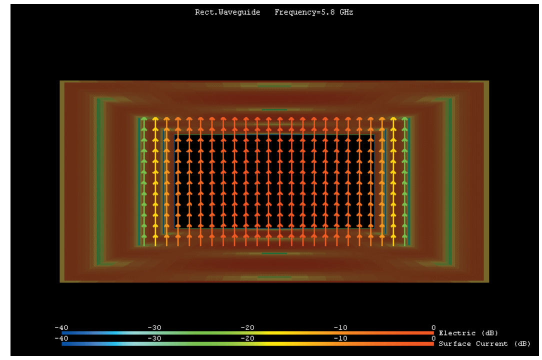
2. 導波管伝送路

図8はMicro-Stripesによる導波管のモデルで，方形断

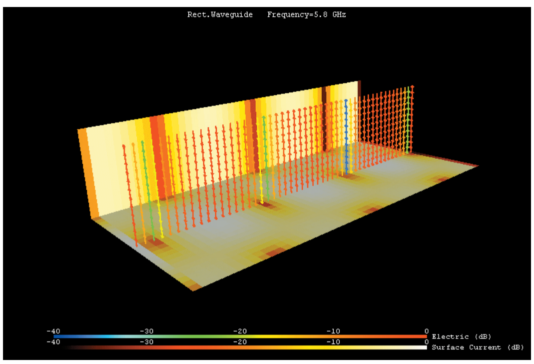
注3：Micro-Stripes（マイクロストライプス）のWebサイトは，http://www.flomerics.com/microstripes/．
注4：定常状態とは，回路に直流または交流を加え，一時的な変動の状態（過渡応答）を経過した後，一定の直流または交流の電流が流れる状態．
注5：TEMは，transverse electromagneticの略．



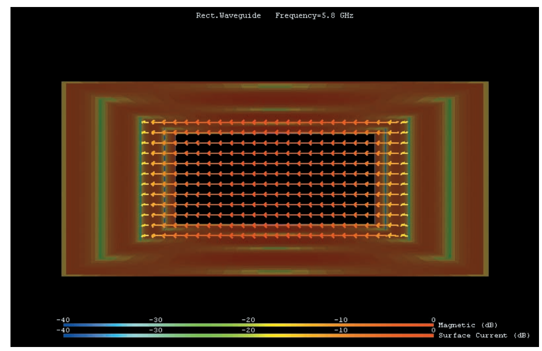
◀ **図8**
導波管のモデル
Micro-Stripes によるもの．方形断面を44.55mm ×22.15mm，管の長さを100mmに設定している．



▶ **図9**
伝送路の進行方向に直交する断面における電界ベクトル
左右の側壁付近では弱くなっていることがわかる．



◀ **図10**
伝送路の長手方向に表示した電界ベクトル
中央部を示す．



▶ **図11**
伝送路の長手方向に表示した磁界ベクトル
中央部を示す．

面を44.55mm×22.15mm，管の長さを100mmに設定しました．両端は吸収境界に接しており，無反射終端を施すことで，長い伝送路の一部をシミュレーションしています．

● 導波管のモード

平行2線と同様に，伝送路の進行方向に直交する断面における電界ベクトルは**図9**のようになりました．これは**図8**の奥にあるポート1を励振しているInitial flux（電束）の向きによって決まる伝搬モード（後述）で，もっとも低い周波数から伝搬する基本モードを示しています．

上下の壁に垂直に出入りしていますが，強さを表す色を調べると，左右の側壁付近では弱くなっていることがわかります（内側の壁は遠近法で表示されている）．中央部でもっとも強く，これを長手方向に表示したのが**図10**です．

図11は**図9**と同じ面の磁界ベクトルです．電界ベクトルと重ねればTEMモードのように見えますが，左右の側壁付近には注意が必要です．磁界ベクトルは金属壁に平行になるため，**図12**のようになります．

電界ベクトルだけが進行方向に対して垂直なので，これをTEモードと呼んでいます．また，**図13**，**図14**に方形導波管の多くのモード(4)を示します．各モードはそれぞれほかのモードの存在には無関係にエネルギーを伝搬できます．これをモード間に直交性（orthogonality）があるといいます．

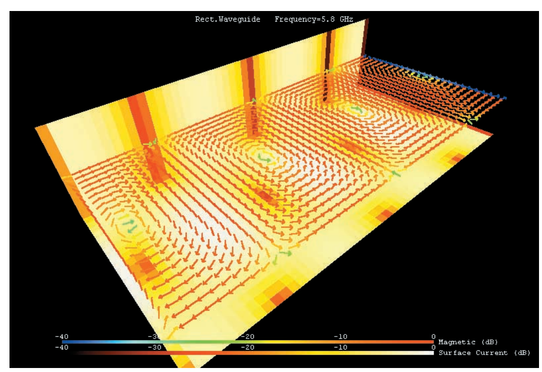


図12　水平面の磁界ベクトル
磁界ベクトルは金属壁に平行になる．

● 遮断周波数とその応用

導波管内を伝搬する電磁波の周波数によっては，進行方向に指数関数的に減衰する特性を示します．これを遮断またはカットオフ（cut-off）といいます．

図8の導波管モデルのリターン・ロス（S_{11}の対数表示）を**図15**に示します．3.15GHz付近よりも低い周波数領域では反射が大きいことがわかります．**図16**に示すWave guide

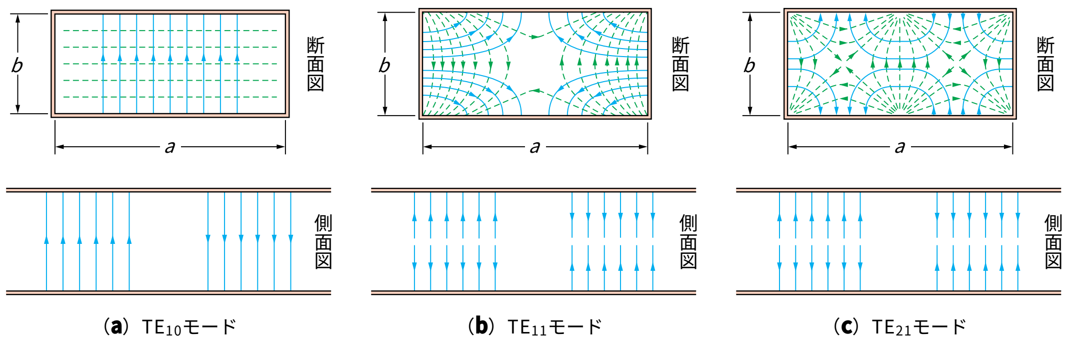


図13 方形導波管の多くのTEモード
電界ベクトルだけが進行方向に対して垂直．

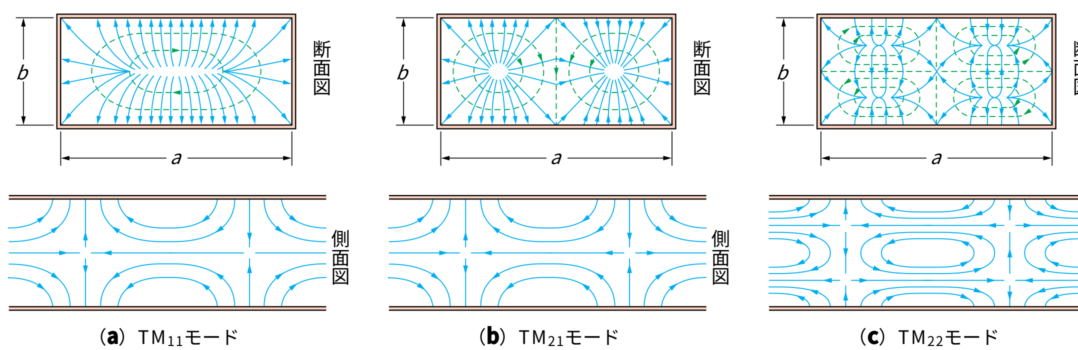


図14 方形導波管の多くのTMモード
磁界ベクトルだけが進行方向に対して垂直．

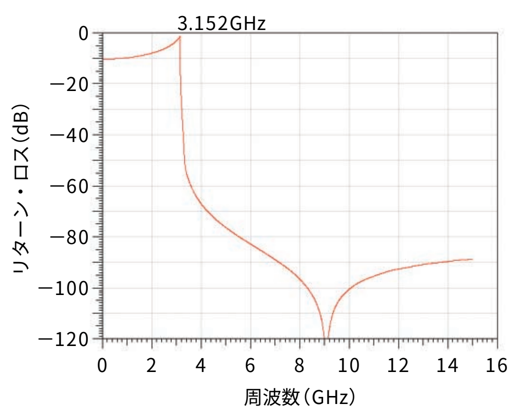


図15 導波管モデルのリターン・ロス
3.15GHz付近よりも低い周波数領域では反射が大きいことがわかる．

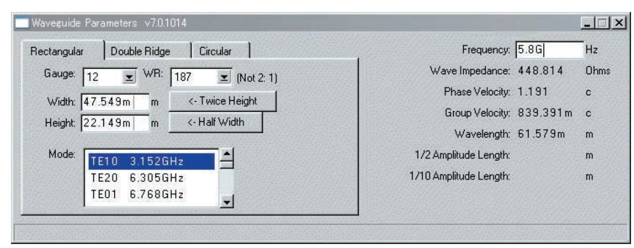


図16 Micro-StripesのWaveguide Parameters
遮断周波数を調べることができる．

Parametersというツールを使って遮断周波数を調べることができますが，TE_{10}モードでは3.152GHzと表示され，シミュレーション結果とよく一致しています．

遮断状態が起きる臨界点の周波数が遮断周波数ですが，これは次の式によって得られます．

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \cdots\cdots(4)$$

ここでm，nは0から始まるモード番号で，x(横)方向，y(縦)方向の電界の山の数，a：x方向の長さ，b：y方向の長さ

通気が必要な部屋を電磁シールドする場合，せっかく壁全体をシールドしても，通気用の開口部から電磁波が漏れてしまいます．しかし，使用する周波数によっては，式(4)から得た寸法の金属筒を介して換気すれば，開口部を持ったままで電磁しゃへいを実現できるでしょう．

図17は連載第14回でとりあげた6角形の孔を持つシールド板です．孔の部分は導波管と見なせるほどの長さではありません．しかし遮断周波数以下の周波数では伝搬方向に対して指数関数的に減衰することを考えれば，板が厚いほうがより効果があると解釈できないでしょうか．

● 光速よりも速い？

TE波(TEモードの電磁波)やTM波の伝搬速度は次の式で表されます．

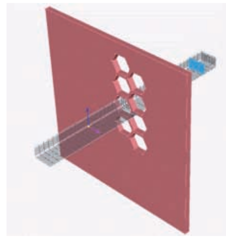


図17
6角形の孔を持つシールド板
遮断周波数以下の周波数では伝搬方向に対して指数関数的に減衰することを考えれば，板が厚いほうがより効果があると解釈できる．

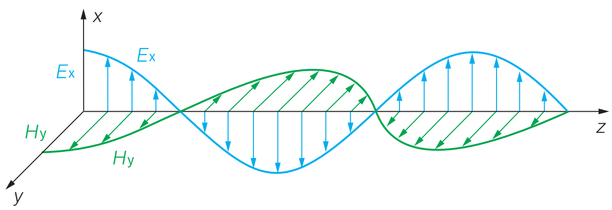


図18　平面波の伝搬
平面波の電界ベクトル*E*と磁界ベクトル*H*を示す．

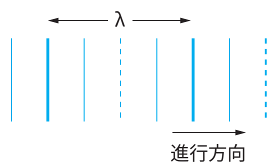


図19
電界の大きさを線の種類で表現
太線を波の山とすれば，細線が0，点線が谷を表す．

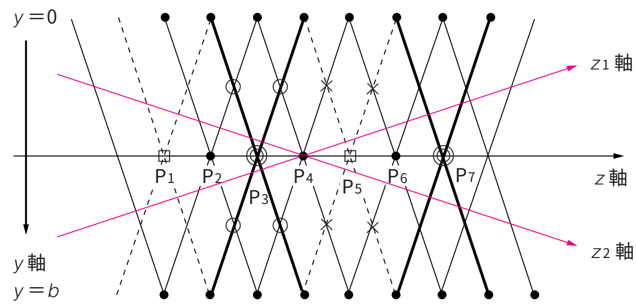


図20　二つの平面波の合成
z_1とz_2に進む二つの平面波の合成波は，P_1～P_7に対して正弦波になっている．

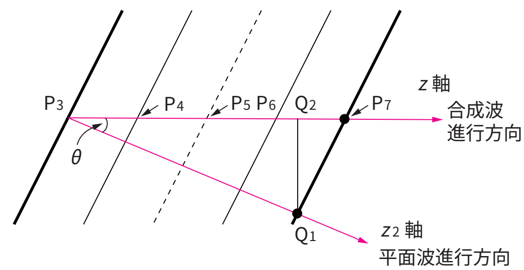


図21　図20のz_2軸表示
エネルギーがP_3からQ_1まで光速で運ばれたとすれば，合成波（TE_{10}波）の位相はP_3からP_7に進む．

$$v_p=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad \cdots\cdots(5)$$

導波管内では遮断周波数より高い周波数で伝搬するので，式(5)の値は光速cよりも大きくなります．

アインシュタインは「エネルギーが伝わる速度は光速より速くはなれない」と言いました．しかし，相対論は光速を超える現象をすべて禁じているわけではなく，質量のある「物体」を光速まで加速するのに無限のエネルギーが必要であると言っているだけです．

例えば長い電光掲示板を移動する表示文字のように，物体そのものが移動しないのであれば，文字が光速以上で通り抜けてもよいのです．

式(3)や式(5)のv_pは位相速度と呼ばれ，波面（つまり情報）が伝わる速度を表します．

● エネルギー速度

それでは導波管内でエネルギーが伝わる速さはどうでしょうか．ここでは数式を用いずに，平面波（2004年11月号，pp.139-146の連載第7回を参照）の合成としてTE_{10}モードの伝搬を考えてみます．

図18は平面波の電界ベクトルEと磁界ベクトルHを表しています．**図19**は電界の大きさを線の種類で表現する方法を示しており，太い線を波の山とすれば，細い線が0，点線が谷を表しています．

図20のようにz_1軸方向へ進む平面波とz_2軸方向へ進む平面波を合成してz軸方向へ進む波を描くと，P_1～P_7に対して正弦波になっていることがわかります．ここで$y=0$と$y=b$にある●で示したところは電界がゼロなので，これらに沿って導波管の側壁を置いてもかまいません．また，電界はy-z面に垂直ですから，やはり導波管の上下の板を置いたと考えれば，この方法で方形導波管内のTE_{10}モードの伝搬を表現できます．

図21は**図20**のz_2軸を示しています．この平面波によってエネルギーがP_3からQ_1まで光速で運ばれたとすれば，合成波（TE_{10}波）の位相はP_3からP_7に進んでいます．また，z軸方向へ進むエネルギーはQ_2まで達します．これらから，速度は次の式で表されます．

$$光速\ c=\frac{\overline{P_3Q_1}}{\Delta t} \quad \cdots\cdots(6)$$

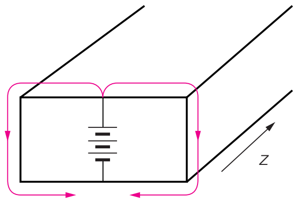


図22
導波管につないだ電池と電流路
導波管に電池をつないでも，断面に沿って強い電流が流れるだけで，z方向に電流は流れない．

$$\text{位相速度}\ v_p = \frac{\overline{P_3P_7}}{\Delta t} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\text{エネルギー速度}\ v_g = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\Delta t} \quad \cdots\cdots(8)$$

ここで $\overline{P_3P_7}\cos\theta = \overline{P_3Q_1}$， $\overline{P_3Q_1}\cos\theta = \overline{P_3Q_2}$ から，

$$\frac{v_p}{c} = \frac{\overline{P_3P_7}}{\overline{P_3Q_1}} = \frac{1}{\cos\theta} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\frac{v_g}{c} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_3Q_1}} = \cos\theta \quad \cdots\cdots(10)$$

これから，

$$v_g = c\cos\theta \quad \cdots\cdots(11)$$

また，

$$v_g v_p = c^2 \quad \cdots\cdots(12)$$

が成り立ちます．

遮断周波数f_cで波が進まなくなる現象は，**図21**における平面波の進行方向がz軸に垂直になることに相当します．このとき$v_p=\infty$で，式(12)から$v_g=0$となり，エネルギーは伝わらなくなります．

なお，平行2線路などのTEM波ではv_pとv_gは等しく，それらは光速cになります(6)．

● どこに電圧をかけるのか？

平行2線路などの2導体系の伝送路に電池をつなげば，負荷に直流電圧がかかります．一方，導波管は**図22**のようにつないでも，断面に沿って強い電流が流れるだけで，z方向に電流は流れません．このように考えると，f_cより高い周波数の交流を伝送できるという発見[注6]が，ようやく1936年に実験で確かめられた[注7]というのもうなずけます(6)．

注6：1897年にイギリスのレイリー卿(Lord Rayleigh)によって証明された．
注7：米国のベル研究所のサウスワース(G. C. Southworth)によって実験的に証明された．

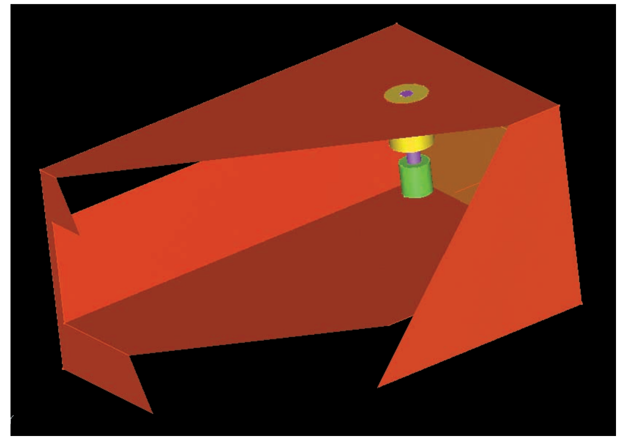


図23　同軸アンテナによる導波管のTE$_{10}$モード励振
芯線導体の半径は0.635mmで，導波管内に突起している部分の全長は4.88mm．先端部の太い部分の半径は1.435mmで，長さは3mm．

導波管の励振は，**図23**のように同軸線路を挿入して行います．芯線導体の半径は0.635mmで，導波管内に突起している部分の全長は4.88mmです．先端部が太くなっていますが，この部分の半径は1.435mmで，長さは3mmです．導波管の上面に見える同軸の断面にポート1を設定し，導波管の手前の断面にポート2を設定しています(7)．

これはモノポール・アンテナ(5)と考えられますが，**図12**を参考に，終端の壁から1/4波長の位置に設置することで，TE$_{10}$モードで励振されることになります．

参考・引用*文献

(1) 都築卓司；物理トリック＝だまされまいぞ！，講談社，ブルーバックスB483，1981年．
(2) 小暮裕明；コンパクト・アンテナブック，CQ出版，1993年(第5版)．
(3) Christos Christpoulos ； The Transmission-Line Modeling Method TLM， IEEE PRESS，1995(C. クリストポロス，加川幸雄訳；TLM伝送線路行列法入門　非定常電磁界解析のためのもうひとつのモデル，培風館，1999年)．
(4) 小暮裕明；電磁界シミュレータで学ぶ高周波の世界， CQ出版，2003年(第6版)．
(5) 小暮裕明；電磁界シミュレータで学ぶワイヤレスの世界， CQ出版，2003年(第2版)．
(6) 内藤喜之；情報伝送入門，昭晃堂，2002年(初版)．
(7) 小暮裕明；共振によるトラブルを探る(その2)―ハウジング内に取り込まれる電磁エネルギー―，Design Wave Magazine，pp.146-153，2002年4月．

こぐれ・ひろあき
小暮技術士事務所・技術士(情報工学部門)
http://www.kcejp.com/